

# 基于 Kriging-SBO 算法的拱桥拱轴线优化设计\*

毛星波, 盛冬发, 李忠君, 朱军

西南林业大学土木工程学院, 云南 昆明 650224

**摘要:** 为对比设计空间内的所有拱轴方案, 得到最佳及可能存在的其他较好可行拱轴设计, 以拱轴应力分布为优化目标, 提出一套基于 Kriging 代理模型的拱轴优化方法。该方法用 Kriging 模型来显式表达应力优化目标与设计变量之间的隐函数关系, 同时采用以改善期望准则(EI 准则)为加点准则、粒子群优化(PSO, particle swarm optimization)算法为子优化求解算法的 SBO(surrogate-based optimization)算法作为目标函数的寻优算法。对圆弧、抛物、悬链, 以及 3 次样条拱轴曲线函数进行分析, 确定了这 4 种常用拱轴线的待优化设计变量; 同时给出了表征拱轴全局应力水平的目标函数值的计算方法和拱轴优化的具体流程。最后, 对工程算例进行了探索优化, 并对优化细节与结果进行了说明与讨论。结果表明: 这一方法能得到设计空间内最佳及其他较好可行拱轴设计, 其中最佳设计的 3 次样条拱轴线使算例拱轴最大应力减小 67%, 关键截面应力方差减小 97%。研究能为拱轴选型提供更多选择, 也对以应力为目标的拱桥拱轴线优化具有参考意义。

**关键词:** 桥梁工程; 拱轴优化; Kriging 模型; 改善期望准则; 粒子群优化算法

**中图分类号:** U448.22 **文献标志码:** A **文章编号:** 2097-0137(2023)04-0139-08

## Arch bridge axis optimization design based on Kriging-SBO

MAO Xingbo, SHENG Dongfa, LI Zhongjun, ZHU Jun

School of Civil Engineering, Southwest Forestry University, Kunming 650224, China

**Abstract:** To optimize the design of the arch axis of bridges, we propose a scheme with a set of Kriging surrogate models focusing on the stress distribution of axes. The Kriging model is used to express the implicit function relationship between stress-optimizing objective and design variables. Meanwhile, the Surrogate-Based Optimization (SBO) algorithm with Expected Improvement (EI) criterion is adopted as the infill sampling criterion and the Particle Swarm Optimization (PSO) algorithm is selected as a sub-optimization algorithm. By analyzing the curve functions of circle, parabolic, catenary, and cubic spline, the variables to be optimized for these common arch axes were determined. The calculation method of objective function value which can represent the global stress level of the arch axis and the specific flow of optimization are presented. An engineering example is analyzed which verifies the feasibility of the scheme. The results show that the best arch-axis design of cubic spline reduces the maximum stress of the arch by 67% and the stress variance of the key section by 97%. Our study provides more options for the shape design of arch bridges and also has reference significance for the optimization of the arch axis with stress as the target.

**Key words:** bridge engineering; optimization of arch axis; Kriging model; expected improvement criterion; particle swarm optimization

\* 收稿日期: 2022-06-08

录用日期: 2022-11-08

网络首发日期: 2023-03-31

基金项目: 国家自然科学基金(11862023); 云南省教育厅基金(2022Y607)

作者简介: 毛星波(1996年生), 男; 研究方向: 计算机优化结构设计; E-mail: maorb.swfu@foxmail.com

通信作者: 盛冬发(1966年生), 男; 研究方向: 黏弹性材料损伤与断裂; E-mail: shengdf@swfu.edu.cn

拱桥拱轴线对拱桥整体力学及可靠性有重要影响。为使拱桥有更好综合性能,大量工程师和学者对拱桥拱轴线的优化进行了研究。对于拱轴线优化问题,早期的且广泛认同的解决方法是求解“合理拱轴线”。当拱圈轴线与拱上各种荷载的压力线吻合,在理论上拱圈截面上只有轴向压力,而无弯矩作用,应力均匀时,这样的拱轴线我们称为合理拱轴线(贺栓海, 1996; 蒋启平, 2001)。如圆弧拱轴线就是根据三铰拱桥在静水压力荷载作用下,假定截面弯矩为零推导出来的(魏德芳等, 1994)。求解合理拱轴线的优化方法针对某种特定简单荷载作用下的拱桥虽能取得极好的优化效果,但对于拱上荷载复杂的拱桥,其合理拱轴线的求解至今仍是一大难题。再有,其求解出的函数表达式也过于复杂,难以推广(胡常福等, 2018)。故为解决承受复杂荷载拱桥的拱轴优化问题,有学者提出了相对于合理拱轴线方法较为折中的“拟合类优化方法”。拟合类优化方法的核心思想是通过调整拱轴上有数几个点的纵坐标,使优化目标最小或使其在优化迭代中趋于收敛,最后用常用的几种线形对这几点进行拟合得到较优的拱轴线。其中的优化目标根据建设需求而定,可以是受力状态、经济造价、可靠度等。目前,以受力状态为优化目标的方法是研究最多且应用最成熟的,常用的弯曲能量最小法(胡常福等, 2014; 周尚猛等, 2010)及截面偏心距最小法(林阳子等, 2007; 代慧娟等, 2016)也都属于此类。

无论是求解“合理拱轴线”的优化方法,还是以弯曲能量最小法和截面偏心距最小法为代表的“拟合类优化方法”,它们都无法对设计空间内的所有拱轴方案进行考察对比。这样一来便无法判断优化结果是否为最佳设计,也失去了寻找到其他可行方案的可能。另外,拱轴优化的最终目的是使拱肋或拱圈的应力分布尽量均匀,如此才能最大限度利用材料性能。故根据以上思路,本文考虑是否能构建一种以拱轴应力分布为优化目标,能够实现全部拱轴方案考察的拱轴优化方法。

经探究,本文提出以Kriging代理模型表达应力目标与拱轴设计变量隐函数关系,且以SBO(韩忠华等, 2020)算法为寻优算法(以下简称为Kriging-SBO算法)的拱轴优化方法。代理模型是指通过少量样本信息构建的能替代那些复杂数值分析,或能显式表达设计参数与目标函数隐式关系的数学模型。Kriging模型是其中具有代表性的一种,

已在有限元模型修正(秦世强等, 2021)、结构优化设计(Zhang et al., 2020)、结构可靠度分析(Zhang et al., 2021)等领域有不少应用尝试。

本文将首先对内容中涉及的基本理论进行简单阐述;其次,分析现今常用的拱轴曲线函数得到待优化设计变量,并构建表征全拱应力水平的目标函数值表达式;最后,给出基于Kriging-SBO算法的拱桥拱轴线优化具体步骤,并通过算例对优化实现的细节和结果进行探讨。

## 1 理论基础

### 1.1 Kriging代理模型

在拱桥拱轴线优化过程中,拱轴线形与目标函数之间为复杂的隐函数关系,为便于寻优,需要将这一关系转化为显函数。在这里,我们利用Kriging代理模型对其进行拟合转化。Kriging模型是一种基于随机过程的估计方差最小的无偏估计模型,其基本思想是利用已知样本点函数值(本文为目标函数值)的线性加权求和来求得未知预测点的函数值。Kriging模型基本构造为

$$\begin{cases} \hat{y}(x) = \sum_{i=1}^n w_i y_i, \\ y(x) = \sum_{i=1}^p \beta_i f_i(x) + Z(x) = \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{f}(x) + Z(x), \end{cases} \quad (1)$$

式中 $\hat{y}(x)$ 为Kriging模型对目标函数的预测值; $w_i$ 、 $y_i$ 分别为各已知样本点加权值和函数值; $y(x)$ 为根据统计学假设引入的该函数模型具体实现; $\boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{f}(x)$ 为模型的确定性部分,用来模拟函数的总体趋势,由基函数 $f(x)$ 与其权重 $\boldsymbol{\beta}^T$ 构成, $f(x)$ 一般为0次(常数)、一次、二次多项式构成; $Z(x)$ 为模型的概率性部分,代表函数的随机误差,其服从正态分布。假设 $\hat{y}(x)$ 与 $y(x)$ 之间满足无偏估计及预测均方差最小条件,采用拉格朗日乘数法,可解得各已知样本点加权值 $w_i$ 。将 $w_i$ 代回预测值表达式 $\hat{y}(x)$ ,至此设计空间中任意设计位置函数值可由 $\hat{y}(x)$ 预测得到,模型构建完成。

### 1.2 代理优化算法

代理优化算法(SBO)是一种基于历史数据来驱动新样本点加入以使代理模型精度不断提高的自适应优化算法。它解决了样本点数量对模型精度影响较大的问题。因此,SBO算法相较于传统优化方法具有收敛精度高、速度快、样本点数量合适的优点。故本文选用其对拱轴线形寻优。

SBO算法最核心的机制为“加点准则”,所谓

“加点准则”是指如何由所建立代理模型去产生新的样本点的法则或规则。针对Kriging模型的加点准则有改善期望准则(EI准则)(Jones et al., 1998; Zhang et al., 2019)、改善概率准则(PI准则)、均方差准则(MSE准则)等。本文使用EI准则作为SBO算法的加点准则。设Kriging模型预测结果 $\hat{y}(x)$ 服从均值为 $\bar{y}(x)$ 、标准差为 $s(x)$ 的正态分布, 有EI准则具体构造

$$E[I(x)] = (y_{\min} - \bar{y}(x))\Phi\left(\frac{y_{\min} - \bar{y}(x)}{s(x)}\right) + s(x)\Psi\left(\frac{y_{\min} - \bar{y}(x)}{s(x)}\right), \quad (2)$$

式中 $I(x)$ 为目标函数改善量, 由 $I(x) = \max(y_{\min} - \hat{y}(x), 0)$ 得到;  $y_{\min}$ 为当前样本集中最优目标函数值;  $\Phi$ 和 $\Psi$ 分别代表标准正态累积分布函数和标准正态分布概率密度函数。

通过优化算法得到使EI值最大的设计点, 将其作为新样本点加入初始样本组, 不断更新代理模型, 如此反复, 直至满足本文拱轴优化的收敛准则

$$\frac{|F' - y_{\min}|}{|F'|} \leq \varepsilon, \quad (3)$$

式中 $F'$ 为新样本点对应目标函数值;  $\varepsilon$ 为模型迭代终止阈值, 其值大小根据具体问题精度要求确定, 在本文拱轴线形寻优中, 设为1%。

### 1.3 标准粒子群(PSO)算法

从SBO算法实行步骤知, 我们需要使用优化算法寻找使EI值最大的设计点, 以此更新模型, 提高模型精度, 这就是子优化问题(韩忠华, 2016)。求解子优化问题的优化算法通常有SQP梯度优化算法、信赖域算法、生物启发式算法等。算法种类虽然繁多, 但每种算法皆有自己的适用范围。在这里, 我们选用原理简单, 编程容易且具有良好全局搜索能力的PSO算法(Shi et al., 1998)对子优化问题求解。

PSO算法属于生物启发式算法的一种, 其源自对鸟群捕食行为的研究。它模拟鸟类的觅食行为, 将寻找问题最优解的过程看成鸟类寻找食物的过程。在算法中, 每一个粒子(每只鸟)表征问题的一个可行解, 粒子的速度与位置为解所具有的参数, 粒子的适应度值(文中为EI值)为解的优劣评价标准。粒子的速度与位置可表示为

$$v_{i,j+1} = uv_{i,j} + c_1r_1(p_{i,j} - x_{i,j}) + c_2r_2(g_j - x_{i,j}), \quad (4)$$

$$x_{i,j+1} = x_{i,j} + v_{i,j+1}, \quad (5)$$

式中 $v_{i,j+1}$ 为 $i$ 粒子 $j+1$ 轮迭代时的速度;  $x_{i,j+1}$ 为 $i$ 粒子 $j+1$ 轮迭代时的位置;  $c_1$ 、 $c_2$ 为学习因子, 为提前给定的常数;  $r_1$ 、 $r_2$ 为 $[0, 1]$ 范围内的均匀随机数;  $p_{i,j}$ 为个体最优位置;  $g_j$ 为全局最优位置;  $w$ 为动态惯性权重值。关于PSO算法的具体运算流程及细节问题可参考包子阳等(2016)。

## 2 拱桥拱轴线优化设计

### 2.1 优化设计参数的确定

因4种常用拱轴线形所具有的函数关系各不相同, 其中起控制线形作用的设计参数意义与数量也各有差异, 所以下面将对4种拱轴线形的设计参数分别进行分析。

**2.1.1 圆弧、抛物拱轴线设计参数** 对于圆弧和抛物拱轴线, 其函数表达式分别为

$$y = R(1 - \cos \theta) = R - \sqrt{R^2 - x^2}, \quad (6)$$

$$y = \frac{4f(l-x)x}{l^2}, \quad (7)$$

式中 $R$ 为圆弧半径, 用拱桥矢高 $f$ 和跨长 $l$ 表示为 $R = 0.5l(l/4f + f/l)$ 。由式(6)可知, 控制圆弧线形的设计参数有 $f$ 与 $l$ , 但在实际设计中跨长 $l$ 一般为定值, 故待优化设计参数仅有矢高 $f$ 。与圆弧线一般, 抛物线形拱轴线待优化设计参数也仅有矢高 $f$ 。

**2.1.2 悬链拱轴线设计参数** 悬链线形拱轴线函数表达式为

$$y = \frac{f}{m-1} [\operatorname{ch}(k \cdot \delta) - 1], \quad (8)$$

式中 $m$ 为拱轴系数;  $k$ 、 $\delta$ 都为简略符号, 具体表达式分别为 $k = \ln(m + \sqrt{m^2 - 1})$ 、 $\delta = 2xl$ 。由式(8)可知, 拱轴系数 $m$ 与矢高 $f$ 为悬链线待优化设计参数。

**2.1.3 三次样条拱轴线设计参数** 对3次样条拱轴线函数表达式进行推导(裘伯永等, 1991)。设有3次样条曲线函数

$$y(x) = A_1 + A_2x + A_3x^2 + \sum_{j=1}^m a_j(x - x_j)_+^3, \quad (9)$$

式中

$$(x - x_j)_+ = \begin{cases} x - x_j, & x \geq x_j, \\ 0, & x < x_j, \end{cases}$$

$0 \leq x_1 < \dots < x_j < \dots < x_m \leq l/2$ 为 $m$ 个用户选定的拱轴控制点的横坐标;  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$ 为可通过几何边界条件 $y(0) = 0$ 、 $y(l/2) = f$ 、 $y'(0) = 0$ 确定的待定参数。解出 $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$ , 将其代入式(9)得到3次样条曲线拱轴线函数具体表达式

$$y(x) = \frac{4fx^2}{l^2} - \frac{x^2}{2} \sum_{j=1}^m \frac{a_j(l-2x_j)^3}{l^2} + \sum_{j=1}^m a_j(x-x_j)_+^3. \quad (10)$$

除此之外, 样条曲线函数还应满足拱形条件  $y''(x) \geq 0$ , 即

$$\sum_{j=1}^m a_j [(l-2x_j)^3 - 6l^2(x_i-x_j)_+] \leq 8f, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (11)$$

表 1 常用拱轴线待优化设计参数总结<sup>1)</sup>

Table 1 Summary of design parameters of common arch axis to be optimized

拱轴线形	函数表达式	设计参数	设计参数取值范围
圆弧拱轴线	式(6)	$f$	$f = l/8 \sim l/4$
抛物拱轴线	式(7)	$f$	$f = l/8 \sim l/4$
悬链拱轴线	式(8)	$m, f$	$m = 1.2 \sim 2.8, f = l/8 \sim l/4$
3次样条拱轴线	式(10)	$a_1, a_2, \dots, a_m$	式(11)

1) 设计参数  $m, f$  取值范围参考自《钢管混凝土拱桥技术规范》(2013)

## 2.2 优化目标函数值的确定

为得到能够表征拱轴全局应力水平的目标函数值, 选取关键截面的最大 Mises 应力 (Von Mises stress) 作为目标函数值计算的变量, 其具体表达式为

$$F = f(s_i) = \frac{k_1}{n} \sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})^2 + \frac{rk_2}{n} \sum_{i=1}^n s_i^2, \quad (12)$$

式中  $s_i$  为关键截面  $x_i$  上的最大 Mises 应力数值;  $k_1, k_2$  满足关系  $k_1 + k_2 = 1$ , 且两者皆为正数;  $\bar{s}$  代表若干  $s_i$  的均值;  $r$  为调整系数, 其值一般取  $r \in (1/7^2, 1/2^2)$ 。关键截面  $x_i$  的选取步骤如下: 首先, 以均布原则选取若干截面  $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$  为关键截面, 如选取横坐标  $x = 3, 7, 11, \dots, 4n - 1$  截面; 然后, 确定关键截面中的最小 Mises 应力截面, 记为  $x_{\min}$ ; 最后, 用全拱轴最大 Mises 应力截面替换  $x_{\min}$ 。在上述步骤中, 若全拱轴最大 Mises 应力截面已为关键截面  $x_i$  之一, 则无需执行替换  $x_{\min}$  步骤。

## 2.3 优化流程

将 Kriging-SBO 算法用于拱桥拱轴线优化的算法流程如下:

1) 根据设计要求确定 4 种拱轴线形待优化设计参数的取值范围, 并将其进行归一化处理。然后, 通过拉丁超立方抽样方法 (LHS) 得到待优化设计参数的各个初始样本点  $S_x$ , 初始样本点数量随各线形待优化参数数量不同而有所不同, 一般取  $N \times d$ ,  $N$  取 7~12,  $d$  为待优化参数数量。

2) 根据步骤 1 所得  $S_x$  建立有限元模型进行分

析, 将  $x_i, x_j, f, l$  代入上式可得关于  $a_j$  的不等式方程组, 解方程组得到  $a_j$  的取值范围。至此, 可确定 3 次样条拱轴线待优化设计参数为有一定取值范围的  $a_1, a_2, \dots, a_m$ 。

2.1.4 拱轴线设计参数总结 将 4 种常用拱轴线待优化的设计参数进行总结, 得到表 1。

析, 得到各模型的关键截面最大 Mises 应力数据  $s_i$ 。然后, 依照式(12)计算出各模型对应的目标函数值  $F$ 。由此, 便得到了以  $S_x$  为输入,  $F$  为输出的初始样本集  $S$ 。

3) 以初始样本集  $S$  构造 Kriging 代理模型。根据自身需求, 选择是否执行“确定其他较好极值点的方案”。若不执行, 则进入下一步; 若执行, 则对各小区域的样本点数量进行加密后转入步骤 2)。

4) 将当前最小目标函数值  $y_{\min}$  及其他相关参数代入式(2), 得到 EI 准则具体函数表达式  $E[I(x)]$ 。

5) 确定 PSO 算法参数的具体数值并寻优得到使 EI 函数值最大的设计点  $S_x'$ , 根据  $S_x'$  建立有限元模型, 得到新样本点  $S'$  的目标函数值  $F'$ 。

6) 判断  $F'$  是否满足收敛条件式(3), 若满足, 则进入步骤 7), 若不满足, 则将新样本点  $S'$  加入初始样本集  $S$  并转入步骤 3)。

7) 迭代结束, 得到最终结果。

上述步骤 3) 中的“确定其他较好极值点的方案”具体操作步骤如下:

① 在子优化开始前, 观察得到初始 Kriging 模型各个较好极值点所处的大概区域;

② 将整个设计空间按较好极值点数量划分为数个小区域;

③ 通过 LHS 方法, 加密各小区域的样本点数量。提出此方案是为了解决 Kriging-SBO 算法最终仅收敛于一个全局最小点, 难免会遗失其他较好极值点这一问题。

### 3 拱轴线优化算例

#### 3.1 工程算例概况

以某单跨空腹式拱桥为算例, 该桥主拱圈采用跨长  $l = 56 \text{ m}$ , 矢跨比  $f/l = 1/8$  的等截面悬链线钢筋混凝土拱圈, 其拱轴系数  $m = 2.24$ , 厚为  $0.9 \text{ m}$ , 宽为  $10 \text{ m}$ 。腹拱拱圈为跨长  $l = 3.2 \text{ m}$  等截

面圆弧拱, 腹拱墩为厚  $60 \text{ cm}$  实体横墙, 两者采用材料与主拱圈相同, 皆为 C30 混凝土。拱上填料厚度以主腹拱圈拱顶起  $40 \text{ cm}$  控制, 材料采用轻质陶粒混凝土。C30 混凝土重量密度取  $25 \text{ kN/m}^3$ , 弹性模量取  $300 \text{ GPa}$ 。轻质陶粒混凝土重量密度取  $15 \text{ kN/m}^3$ , 弹性模量取  $18 \text{ GPa}$ 。以上所述具体布置见图 1。

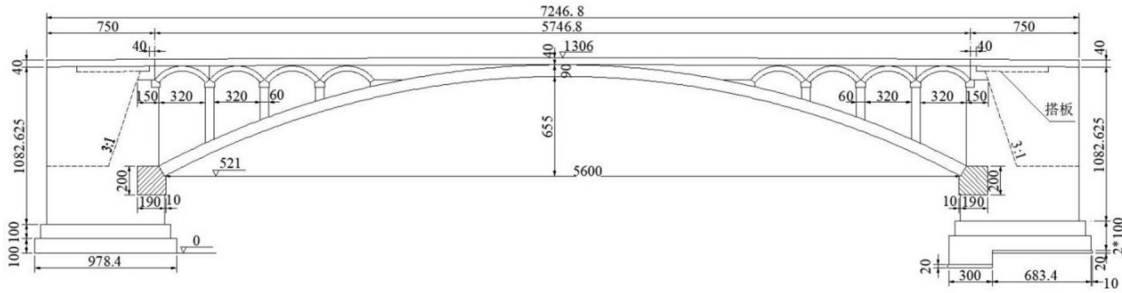


图1 拱桥算例具体布置图(单位: cm)

Fig. 1 Details of arch bridge example(unit: cm)

#### 3.2 优化实现的细节

3.2.1 设计参数取值范围的确定 对于圆弧、抛物和悬链拱轴线, 其待优化设计参数取值范围为矢高  $f$  取为  $l/8 \sim l/4$ , 拱轴系数  $m$  取为  $1.2 \sim 2.8$ 。对

于 3 次样条拱轴线, 选取  $x_1 = 4 \text{ m}$ ,  $x_2 = 16 \text{ m}$ ,  $x_3 = 28 \text{ m}$  为拱轴控制点横坐标。将控制点数据  $x_i$ 、 $x_j$  及  $f=14 \text{ m}$ 、 $l=56 \text{ m}$  代入式(11), 解得 3 次样条拱轴线待优化设计参数  $a_1$ 、 $a_2$ 、 $a_3$  取值范围有

$$\left. \begin{aligned}
 &\text{取值范围1: } a_1 = \frac{-23a_2}{37} - \frac{7}{21312}, \frac{-7}{2592} \leq a_2 \leq \frac{1}{1152}, a_3 \in \mathbf{R}, \\
 &\text{取值范围2: } \frac{-23a_2}{37} - \frac{7}{21312} < a_1 < \frac{7}{6912} - \frac{a_2}{8}, \frac{-7}{2592} < a_2 < \frac{1}{1152}, a_3 \in \mathbf{R}, \\
 &\text{取值范围3: } a_1 = \frac{7}{6912} - \frac{a_2}{8}, \frac{-7}{2592} < a_2 < \frac{1}{1152}, a_3 \in \mathbf{R}, \\
 &\text{取值范围4: } \frac{-1}{1152} < a_1 < \frac{25}{27648}, a_2 = \frac{1}{1152}, a_3 \in \mathbf{R}, \\
 &\text{取值范围5: } a_1 = \frac{-7}{7200} + \frac{3a_2}{25}, \frac{1}{1152} < a_2 \leq \frac{7}{864}, a_3 \in \mathbf{R}, \\
 &\text{取值范围6: } \frac{-7}{7200} + \frac{3a_2}{25} < a_1 < \frac{7}{6912} - \frac{a_2}{8}, \frac{1}{1152} < a_2 < \frac{7}{864}, a_3 \in \mathbf{R}, \\
 &\text{取值范围7: } a_1 = \frac{7}{6912} - \frac{a_2}{8}, \frac{1}{1152} < a_2 < \frac{7}{864}, a_3 \in \mathbf{R},
 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中展示了  $a_1$ 、 $a_2$ 、 $a_3$  全部 7 个可行的取值范围, 其中  $a_3 \in \mathbf{R}$  表示  $a_3$  可取任意实数值, 即  $a_3$  取值不影响样条曲线呈拱形。另结合式(10)可知,  $a_3$  取值对样条曲线纵坐标也无影响, 故  $a_3$  无需考虑优化。观察式(13), 发现  $a_1$  取值与  $a_2$  取值具有一定关系, 故真实的待优化设计参数视具体取值范围而定。如在式(13)的取值范围 1 中, 需要优化的设计参数仅  $a_2$ 。至此, 4 种拱轴线形的待优化设计参数取值范围确定完毕。

3.2.2 初始样本集  $S$  的确定 初始样本集  $S$  由设

计参数初始样本点集  $S_x$  与目标函数值  $F$  对应组成。对于圆弧、抛物和悬链拱轴线, 通过 LHS 方法, 各取 9、9 和 22 组设计参数初始样本点。对于 3 次样条拱轴线, 除取值范围 2 和取值范围 6 的设计参数初始样本点数量取 14 组外, 其余范围皆取 7 组。采用 SAP2000 建立与  $S_x$  对应的各有限元模型, 选取横坐标  $x = 0, 4, 8, \dots, 28 \text{ m}$  截面为关键截面, 并执行  $x_{\min}$  替换步骤。将  $k_1$  设为 0.4,  $k_2$  设为 0.6,  $r$  为  $1/3.5^2$ , 计算得到目标函数值  $F$ 。其中, 有限元模型分析采用静力分析, 主要考虑结构的自重作

用。模型中的主拱、横墙、腹拱和桥面板皆采用梁单元模拟；拱上填料采用释放了相应梁端弯矩的梁单元模拟；边界条件按照图纸设置，省略桥台、桥墩的有限元模型，以相应约束代替。在实际应用中，使用者也可根据工程具体要求(比如考虑行车荷载、风荷载)来建立有限元模型进行分析，只需最终能得到初始样本集 $S$ 即可。

**3.2.3 Kriging代理模型的构造及函数寻优** 以初始样本集 $S$ 构造各拱轴线形的初始Kriging代理模

型，其图像见图2。图2(d)为式(13)中取值范围2构建的Kriging模型，也是3次样条拱轴线最佳设计所在取值范围的Kriging模型。另从图2(c)初步判断，悬链拱轴线在设计空间内有两处较好设计点(最小极值点)，故在悬链拱轴线优化中选择执行“确定其他较好极值点的方案”。将悬链拱轴线的初始Kriging代理模型按矢高 $f$ 划分为 $f \in [7, 10]$ 为第1区域、 $f \in (10, 14]$ 为第2区域，在两区域内分别增加10组样本点，重新建立其Kriging模型。

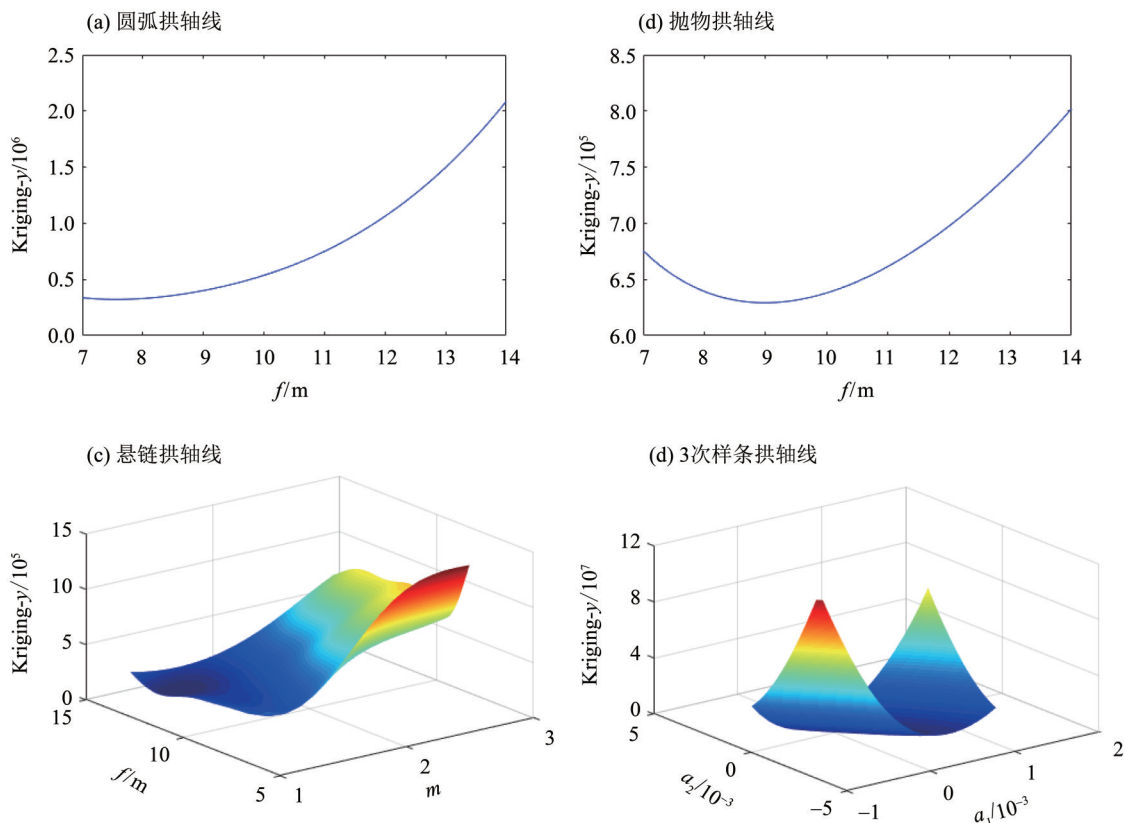


图2 各拱轴线形的初始Kriging代理模型图

Fig. 2 Kriging surrogate models of each arch axis shape

确定目前各线形的最小目标函数值 $y_{\min}$ ，得到 $E[I(x)]$ ，使用PSO算法对其寻优得到使EI函数值最大的设计点 $S_x'$ 。PSO算法参数设置为 $c_1 = 2$ ， $c_2 = 2$ ，最大迭代次数为100，初始粒子数量为100。继续执行后续步骤，直至满足收敛条件，最终得到圆弧拱轴线最佳设计为 $f=7.57$  m，抛物拱轴线最佳设计为 $f=8.99$  m，悬链拱轴线第1区域最佳设计为 $f=9.67$  m， $m=1.4375$ ，悬链拱轴线第2区域最佳设计为 $f=14$  m、 $m=1.5795$ ，3次样条拱轴线最佳设计为 $a_1=1.31018 \times 10^{-4}$ 、 $a_2=-1.0509 \times 10^{-4}$ 。图3给出了上述各拱轴线最佳设计和初始悬

链拱轴线线形的示意图。其中需要注意的是，悬链第2区域拱轴线与3次样条拱轴线基本上呈重合状态，两者在 $y$ 坐标上的最大间距为0.0555 m。

### 3.3 优化结果分析

将上述各拱轴线最佳设计和初始拱轴线的的数据应用于有限元模型，得到该算例在这几种拱轴线下主拱圈的应力分布对比，如图4所示。

由图4可知，各拱轴线最佳设计相较于初始悬链拱轴线，应力峰值均有一定的减小，应力分布的均匀性也有一定程度的改善。从各最佳拱轴线应力改善大小的具体数据(表2)可以看出：① 各

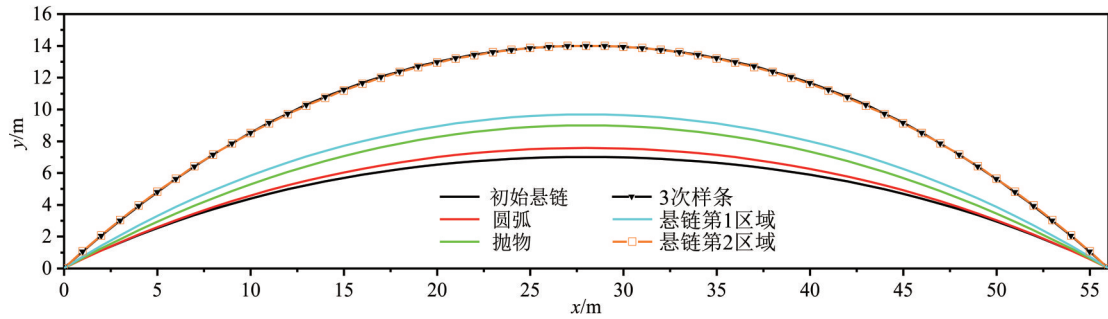


图3 各拱轴线最佳设计与初始拱轴线线形示意图

Fig. 3 Line front of the optimum arch axis designs and the initial arch

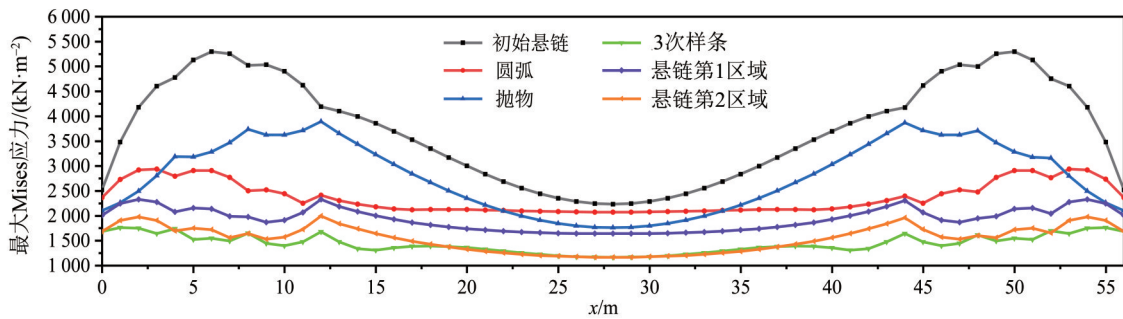


图4 各拱轴线最佳设计与初始拱轴线主拱圈应力分布对比

Fig. 4 Comparison of stress distribution of the optimum arch axis designs and the initial arch axis in main arch ring

表2 各最佳拱轴线应力改善具体数据<sup>1)</sup>

Table 2 Specific data of optimum arch axis stress improvement

拱轴线形	主拱圈最大应力		主拱圈最小应力		目标函数值F		关键截面应力方差	
	数值/(kN·m <sup>-2</sup> )	优化率/%	数值/(kN·m <sup>-2</sup> )	优化率/%	数值	优化率/%	数值	优化率/%
初始悬链	5 293	-	2 231	-	1 224 500	-	1 103 500	-
抛物	3 892	26	1 757	21	629 258	49	585 675	47
圆弧	2 935	45	2 070	7	321 753	74	83 913	92
悬链第1区域	2 328	56	1 636	27	141 214	84	43 744	96
悬链第2区域	1 989	62	1 163	48	197 499	88	63 828	94
3次样条	1 759	67	1 163	48	131 493	89	34 670	97

1) 关键截面应力方差为  $(s_i - \bar{s})^2$ .

拱轴线最佳设计均取得了显著的优化效果, 即使是优化效果较差的抛物拱轴线也在主拱圈最大应力上取得了26%的优化率。② 在悬链线设计空间内寻得的两处最佳拱轴方案都有较好的优化率, 为悬链拱轴设计提供了其他较好的可行选择。③ 结合图3可知, 悬链第2区域最佳设计虽在线形上与3次样条最佳设计相差无几, 但根据各优化率可以看出, 3次样条最佳设计明显有更好的优化效果, 其是算例的最佳拱轴设计。④ 同样结合图3可知, 在矢高方面, 各拱轴线最佳设计都较初始悬链拱轴线大, 这说明初始悬链拱轴线矢高偏小, 前述3次样条矢高定为 $f=14\text{ m}$ 也是此原因。

综上所述, Kriging-SBO算法实现了该算例所有拱轴方案的考察对比, 得到的最佳设计和较好设计对主拱圈的应力分布皆有较大改善。

## 4 结论

本文以构建一种以拱轴应力分布为优化目标, 能够实现全部拱轴方案考察的拱轴优化方法为研究思路, 提出了以Kriging模型为目标函数代理模型, PSO算法和EI准则分别为SBO寻优过程中的子优化求解算法和加点准则的拱轴优化方法; 并结合工程算例对优化的重要细节及结果进行了分析, 得出以下结论:

1) 本文拱轴优化方法实现了拱轴设计空间内所有拱轴方案的对比,进而得到了其中的最佳设计。另外,通过执行“确定其他较好极值点的方案”,也得到了更多的较好拱轴设计,能为拱轴选形提供更高灵活性。

2) 本文优化方法是以拱轴截面最大 Mises 应力分布为优化目标,通过工程算例可看出有较好优

化效果——使拱轴应力峰值大幅降低,且应力分布更均匀。这对以后以应力为目标的拱桥拱轴线优化具有参考意义。

3) 除 3 次样条拱轴线优化需确定矢高  $f$  外,其他 3 种拱轴线形皆能实现矢高  $f$  的优化,其优化结果能为拱桥初步设计阶段的矢跨比确定工作提供一些参考。

#### 参考文献:

- 包子阳,余继周,杨杉,2016.智能优化算法及其MATLAB实例[M].3版.北京:电子工业出版社.
- 代慧娟,白国良,朱雯,等,2016.浅埋大跨地下拱结构拱轴力学及数值优化研究[J].地下空间与工程学报,12(5):1231-1238+1307.
- 韩忠华,2016.Kriging模型及代理优化算法研究进展[J].航空学报,37(11):3197-3225.
- 韩忠华,许晨舟,乔建领,等,2020.基于代理模型的高效全局气动优化设计方法研究进展[J].航空学报,41(5):623344.
- 贺栓海,1996.拱桥挠度理论[M].北京:人民交通出版社.
- 胡常福,廖妙星,2018.多源荷载作用下合理拱轴的近似解析[J].华东交通大学学报,35(2):46-55.
- 胡常福,郑恒,任伟新,等,2014.新型索拱桥索力与拱轴线双优化实用方法[J].中南大学学报(自然科学版),45(7):2320-2325.
- 蒋启平,2001.三次样条插值确定拱桥合理拱轴线的探讨[J].武汉理工大学学报(交通科学与工程版),25(1):101-104.
- 林阳子,黄侨,任远,2007.拱桥拱轴线的优化与选形[J].公路交通科技,24(3):59-63.
- 秦世强,廖思鹏,黄春雷,等,2021.基于自适应Kriging模型的人行斜拉桥有限元模型修正[J].中山大学学报(自然科学版),60(6):43-53.
- 裘伯永,王艺民,1991.拱轴线最优选择[J].长沙铁道学院学报,9(3):140-148.
- 魏德芳,赵继德,1994.三铰拱的合理拱轴线方程[J].曲阜师范大学学报,20(3):80-83.
- 中华人民共和国住房和城乡建设部,中华人民共和国国家质量监督检验检疫总局,2013.钢管混凝土拱桥技术规范:GB 50923-2013[S].北京:中国计划出版社.
- 周尚猛,李亚东,2010.求解合理拱轴线的加权能量方法[J].公路交通科技,27(4):73-77.
- JONES D R, SCHONLAU M, WELCH W J, 1998. Efficient global optimization of expensive black-box functions[J]. J Glob Optim, 13(4): 455-492.
- SHI Y H, EBERHART R, 1998. A modified particle swarm optimizer [C] // 1998 IEEE International Conference on Evolutionary Computation Proceedings. AK, USA: 69-73.
- ZHANG H B, AOUES Y, BAI H, et al, 2020. Kriging-based reliability-based design optimization using single loop approach [M] // Le THI H et al, eds. Optimization of complex systems: Theory, models, algorithms and applications. Cham of Switzerland: Springer.
- ZHANG X B, LU Z Z, CHENG K, 2021. AK-DS: An adaptive Kriging-based directional sampling method for reliability analysis [J]. Mech Syst Signal Process, 156(15):107610.
- ZHANG Y, LI J, XU C, et al, 2019. Vehicle aerodynamic optimization: on a combination of adjoint method and efficient global optimization algorithm [J]. SAE Int J Passeng Cars Mech Syst, 12(2): 139-153.

(责任编辑 秦社彩)